

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2024.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Koliko je puta vrijednost izraza

$$2 \cdot \frac{7\frac{2}{3} : (2\frac{2}{3} + 0.5 : 1\frac{1}{2})}{(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9} \cdot 0.75) : 7\frac{1}{3}}$$

manja od broja 2024?

Rješenje.

Vrijednost zadanog izraza je:

$$2 \cdot \frac{7\frac{2}{3} : (2\frac{2}{3} + 0.5 : 1\frac{1}{2})}{(2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{9} \cdot 0.75) : 7\frac{1}{3}} =$$

$$2 \cdot \frac{\frac{23}{3} : (\frac{8}{3} + \frac{1}{2} : \frac{3}{2})}{(\frac{7}{3} - \frac{10}{9} \cdot \frac{3}{4}) : \frac{22}{3}} =$$

1 BOD

$$2 \cdot \frac{\frac{23}{3} : (\frac{8}{3} + \frac{1}{3})}{(\frac{7}{3} - \frac{5}{6}) : \frac{22}{3}} =$$

$$2 \cdot \frac{\frac{23}{3} : 3}{\frac{9}{6} : \frac{22}{3}} =$$

2 BODA

$$2 \cdot \frac{23}{9} : \frac{9}{44} =$$

1 BOD

$$= \frac{2024}{81}$$

1 BOD

Zadani izraz je 81 puta manji od broja 2024.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko je učenik rješavao na drugačiji način rješenje treba bodovati po principu:

1 BOD za točan zapis svih decimalnih i svih mješovitih brojeva u obliku razlomaka, 1 BOD za izračunavanje vrijednosti zagrade u brojniku, 1 BOD za izračunavanje vrijednosti zagrade u nazivniku, 1 BOD za daljnje pojednostavljivanje brojnika i nazivnika, 1 BOD za izračunavanje vrijednosti zadatog izraza te 1 BOD za rezultat.

2. Za posjet izložbi Ivana Meštrovića prijavilo se $\frac{2}{7}$ učenika više nego je planirano. Zbog bolesti je odustala šestina prijavljenih učenika pa je na izložbu otišlo šest učenika više nego je planirano. Koliko je učenika otišlo na izložbu?

Prvo rješenje.

Neka je x planiran broj učenika koji je trebao posjetiti izložbu.

Za posjet izložbi se prijavilo $x + \frac{2}{7}x = \frac{9}{7}x$ učenika, tj. prijavilo se $\frac{9}{7}$ planiranog broja. 1 BOD

Zbog bolesti je odustalo $\frac{1}{6} \cdot \frac{9}{7}x = \frac{3}{14}x$ učenika tj. odustalo je $\frac{3}{14}$ planiranog broja. 1 BOD

Na izložbu se uputilo $\frac{9}{7}x - \frac{3}{14}x = \frac{15}{14}x$ učenika tj. uputilo se $\frac{15}{14}$ planiranog broja. 1 BOD

Dakle, u posjet izložbi uputila se $\frac{15}{14}x - x = \frac{1}{14}x$ učenika tj. $\frac{1}{14}$ više nego je planirano.

Vrijedi $\frac{1}{14}x = 6$, 1 BOD

pa je $x = 6 \cdot 14 = 84$. 1 BOD

Planirano je da na izložbu ide 84 učenika, a otišlo je 6 učenika više pa je ukupan broj učenika koji su otišli na izložbu 90. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik postavi jednadžbu $x + 6 = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{7}x$ koja vodi ka planiranom broju učenika ostvaruje 3 BODA. Nadalje točno rješavanje iste vrednuje se s još 2 BODA. Konačno rješenje 90 vrednuje se s 1 BODOM.

Druge rješenje.

Za posjet izložbi prijavilo se $\frac{2}{7}$ učenika više nego je planirano tj. prijavilo se $\frac{9}{7}$ planiranog broja.

Odustala je šestina prijavljenih učenika tj. odustala je $\frac{1}{6}$ od $\frac{9}{7}$ planiranog broja što je $\frac{3}{14}$ planiranog broja učenika. 2 BODA

Stoga je planirani broj učenika za posjet izložbi djeljiv sa 14. 1 BOD

Prikažimo tablicom mogućnosti:

Planirani broj učenika	Prijavljeni broj učenika (2/7 više)	Broj učenika koji su posjetili izložbu (5/6 prijavljenih)	Razlika između planiranog broja i broja učenika koji su posjetili izložbu
14	18	15	1
28	36	30	2
42	54	45	3
56	72	60	4
70	90	75	5
84	108	90	6

Ako je planirano da na izložbu ide 84 učenika, a otišlo je 6 učenika više, ukupan broj učenika koji su otišli na izložbu je 90. 2 BODA

Treba još provjeriti postoji li neko drugo rješenje koje zadovoljava zadane uvjete.

98	126	105	7
112	144	120	8

Dakle, vidljivo je da je povećanjem planiranog broja učenika iznad 84 razlika veća od 6, a to ne zadovoljava uvjete zadatka i time je pokazano da je na izložbu moglo otići ni više ni manje od 90 učenika.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena 1: Učenik koji ne pokaže da rješenje ne može biti veće od 90 ostvaruje najviše 5 BODOVA. Učenik koji pogodi rješenje i provjeri da odgovara uvjetima zadatka, bez dodatnih obrazloženja, može ostvariti najviše 2 BODA.

Napomena 2: Ukoliko učenik navede da je broj planiranih učenika djeljiv sa 7 i ispituje višekratnike broja 7, a uz točno obrazloženje da nema rješenja većeg ni rješenja manjeg od 90, ostvaruje 6 BODOVA.

3. Otac i majka imaju ukupno 80 godina. Njihovo troje djece imaju 9, 7 i 2 godine. Kroz nekoliko godina zbroj godina djece iznosit će polovinu zbroja godina oca i majke. Koliko će godina tada imati otac, a koliko majka ako je majka šest godina mlađa od oca?

Prvo rješenje.

Neka je m broj majčinih godina. Tada je broj očevih godina $m + 6$.

Vrijedi $m + m + 6 = 80$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo da otac sada ima 43 godine, a majka 37 godina. 1 BOD

Za x godina zbroj godina djece biti će polovina zbroja godina oca i majke pa vrijedi:

$(9 + 7 + 2) + 3x = 0.5(80 + 2x)$ 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 11$. 1 BOD

Za 11 godina otac će imati 54, a majka 48 godina. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Za x godina zbroj godina djece biti će polovina zbroja godina oca i majke pa vrijedi:

$(9 + 7 + 2) + 3x = 0.5(80 + 2x)$. 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = 11$. 1 BOD

Tada će majka i otac zajedno imati $80 + 22 = 102$ godine. 1 BOD

Kako je majka 6 godina mlađa od oca, označimo sa m broj godina majke.

Tada vrijedi $m + m + 6 = 102$. 1 BOD

Rješavanjem jednadžbe dobivamo da majka ima 48 godina, a otac 54 godine. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik prvo izračuna broj godina oca ili jednadžbe postavi i riješi drugačijim redoslijedom zadatka se vrednuje u skladu s ponuđenom razdiobom bodova.

4. U učionici se nalazi šest istovrsnih klupa: dvije plave, jedna crvena i tri zelene. Na koliko se načina mogu složiti u niz, jedna uz drugu, tako da crvena klupa bude pored plave?

Prvo rješenje.

Označimo plave klupe sa P, crvenu sa C, a zelene sa Z.

1. slučaj. Plava klupa je u nizu nakon crvene pa te dvije klupe CP promatramo kao nedjeljivu cjelinu od pet elemenata CP, P, Z, Z, Z.

Blok CP možemo razmjestiti na 5 različitih pozicija. Preostala 4 mesta se popunjavaju s 1 plavom i 3 zelene klupe, a to je moguće na 4 načina. 1 BOD

Mogućih razmještaja je $5 \cdot 4 = 20$. 1 BOD

2. slučaj. Plava klupa je u nizu prije crvene pa te dvije klupe PC promatramo kao nedjeljivu cjelinu od pet elemenata PC, P, Z, Z, Z.

Slično 1. slučaju, mogućih razmještaja je $5 \cdot 4 = 20$. 2 BODA

Neki razmještaji dvaput su prebrojani jer je u nekim razmještajima P istovremeno i prije i poslije C (blok PCP). Kako u tim razmještajima crvena klupa ne može biti ni prva ni posljednja (jer je i prije i poslije nje plava klupa) dva puta su brojana 4 načina razmještanja klupa (kada je crvena klupa 2., 3., 4. ili 5. po redu). 1 BOD

Ukupan broj načina razmještanja klupa je $20 + 20 - 4 = 36$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Druge rješenje.

1. slučaj.

Neka je plava klupa u nizu nakon crvene i označimo ih sa CP. Razmještamo ostale klupe. Slijedi prikaz svih mogućih razmještaja klupa:

CP	P	Z	Z	Z
CP	Z	P	Z	Z
CP	Z	Z	P	Z
CP	Z	Z	Z	P

P	CP	Z	Z	Z
Z	CP	P	Z	Z
Z	CP	Z	P	Z
Z	CP	Z	Z	P

P	Z	CP	Z	Z
Z	P	CP	Z	Z
Z	Z	CP	P	Z
Z	Z	CP	Z	P

P	Z	Z	CP	Z
Z	P	Z	CP	Z
Z	Z	P	CP	Z
Z	Z	Z	CP	P

P	Z	Z	Z	CP
Z	P	Z	Z	CP
Z	Z	P	Z	CP
Z	Z	Z	P	CP

Mogućih razmještaja je $5 \cdot 4 = 20$. 2 BODA

2. slučaj.

Neka je plava klupa u nizu prije crvene pa gledamo blok PC.

Slično 1. slučaju, mogućih razmještaja je također $5 \cdot 4 = 20$. 2 BODA

Neki razmještaji dvaput su prebrojani jer je u nekim razmještajima P istovremeno i prije i poslije C (blok PCP). Kako u tim razmještajima crvena klupa ne može biti ni prva ni posljednja (jer je i ispred i iza nje plava klupa) dva puta su brojana 4 načina razmještanja klupa (kada je crvena klupa 2., 3., 4. ili 5. po redu).

1 BOD

Ukupan broj načina razmještanja klupa je $20 + 20 - 4 = 36$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Svakih 10 točno ispisanih razmještaja klupa vrednovati s 1 BODOM. Učenik koji je popisao 40 razmještaja, a nije prepoznao dvostruko zapisane ostvaruje 4 BODA.

5. U jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom duljine 45 cm upisan je pravokutnik. Dva njegova vrha pripadaju hipotenuzi, a druga dva katetama. Odredi moguće duljine stranica pravokutnika ako je duljina jedne stranice 40 % duljine njoj susjedne stranice.

Rješenje.

Neka je ABC jednakokračan pravokutni trokut s pravim kutom pri vrhu C te neka je $MNKL$ pravokutnik upisan trokutu ABC kojem vrhovi M i N pripadaju hipotenuzi.

Trokut ABC je jednakokračan pravokutan pa je $|\angle BAC| = |\angle CBA| = 45^\circ$.

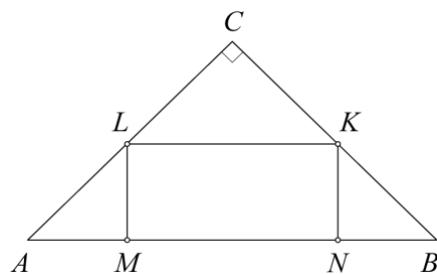
U pravokutnim trokutima AML i NBK vrijedi $|\angle ALM| = |\angle NKB| = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. 1 BOD

Slijedi da su trokuti KNB i AML jednakokračni pravokutni tj.

$$|NK| = |NB| = |ML| = |MA| = 0.4x. \quad 1 \text{ BOD}$$

Za ostvarivanje prva dva boda dovoljno je da učenik jednakokračne trokute označi na skici ili iskaže riječima da su trokuti jednakokračni.

1. slučaj: Neka je $|MN| > |NK|$ pa označimo $|MN| = x$, $|NK| = 0.4x$.



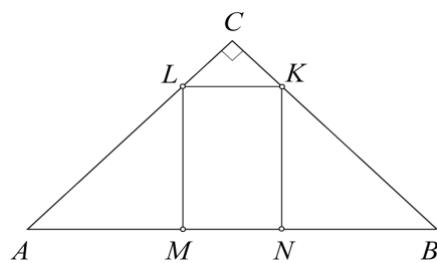
Kako je $|AM| + |MN| + |NB| = |AB|$, vrijedi $0.4x + x + 0.4x = 45$

1 BOD

pa je $1.8x = 45$ i $x = |MN| = 25 \text{ cm}$, a $|NK| = 0.4 \cdot 25 = 10 \text{ cm}$.

1 BOD

2. slučaj: Neka je $|MN| < |NK|$ pa označimo $|MN| = 0.4x$, a $|NK| = x$.



Analognim zaključivanjem dobijemo $x + 0.4x + x = 45$

1 BOD

pa je $2.4x = 45$ i $x = |NK| = 18.75 \text{ cm}$, a $|MN| = 0.4 \cdot 18.75 = 7.5 \text{ cm}$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Učenik koji je dobio točno rješenje (obje mogućnosti), a nije obrazložio (označio na skici ili napisao riječima) da su trokuti KNB i AML jednakokračni može ostvariti najviše 4 BODA.

6. Četiri prijateljice, Ana, Dora, Marta i Tea zajedno kupuju rođendanski poklon za petu prijateljicu. Ana je dala 40 % ukupnog iznosa poklona, Dora je dala trećinu iznosa kojeg su dale ostale tri prijateljice, a Marta je dala 25 % ukupnog iznosa kojeg su dale ostale tri prijateljice. Tea je dala 51 euro. Kolika je cijena poklona?

Rješenje.

Neka je cijena poklona x eura. Neka su A, D, M i T iznosi koje su dale redom četiri prijateljice.

Dora je dala trećinu iznosa kojeg su dale preostale tri prijateljice, tj. $D = \frac{1}{3}(A + M + T)$.

Sve četiri prijateljice zajedno su dale $A + M + T + \frac{1}{3}(A + M + T) = x$, 1 BOD
iz čega slijedi:

$$\frac{4}{3}(A + M + T) = x \quad \text{1 BOD}$$

$$A + M + T = \frac{3}{4}x \quad \text{1 BOD}$$

Dakle, Dora je dala $D = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$, što je 25% od ukupnog iznosa. 1 BOD

Marta je dala 25% odnosno četvrtinu iznosa koje su dale ostale tri prijateljice, pa na isti način zaključujemo da je Marta dala $M = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}x$ petinu što je 20 % ukupnog iznosa cijene poklona.

4 BODA

Prema uvjetu zadatka Ana je dala 40 % ukupnog iznosa cijene poklona pa vrijedi da je Tea dala $100\% - 40\% - 25\% - 20\% = 15\%$ ukupnog iznosa cijene poklona. 1 BOD

Kako je Tea dala 51 euro vrijedi:

$$15\% \cdot x = 51$$

$$x = 340$$

Cijena poklona je 340 eura. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Ukoliko učenik ne koristi jednadžbe već grafički ili riječima objasni postupak rješavanja koji vodi ka točnom rezultatu vrednovati u skladu s ponuđenom razdiobom bodova.

Napomena 2: Zaključak da je Dora dala 25 % ukupnog iznosa se može dobiti i zapisivanjem odnosa $3D = A + M + T$ i dodavanjem D na obje strane. Slijedi $4D = A + M + T + D = x$, tj. $D = \frac{1}{4}x$.

7. Odredi sve prirodne brojeve manje od 1000 kojima je znamenka jedinica veća od vodeće znamenke, a razlika tog broja i broja zisanog istim znamenkama u obrnutom poretku je kvadrat prirodnog broja.

Rješenje.

Broj koji je manji od 1000 može biti jednoznamenkast, dvoznamenkast ili troznamenkast.

Pretpostavimo da je traženi broj jednoznamenkast.

Njegova vodeća znamenka je ujedno i znamenka jedinica pa znamenka jedinica nije veća od vodeće znamenke te traženi broj ne može biti jednoznamenkast već mora biti ili dvoznamenkast ili troznamenkast. 1 BOD

Prepostavimo da je \overline{xy} traženi dvoznamenkasti broj. Od većeg broja ćemo oduzimati manji.

Vrijedi da je $x \neq 0$ (vodeća znamenka) i $y \neq 0$ (prema uvjetu zadatka $y > x$).

Tada je broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku \overline{yx} pa je

$$\overline{yx} - \overline{xy} = 10y + x - (10x + y) = 9y - 9x = 9 \cdot (y - x). \quad 1 \text{ BOD}$$

x i y su znamenke različite od 0, njihova razlika $(y - x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

$$\text{Dakle, } 9 \cdot (y - x) \in \{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72\}. \quad 1 \text{ BOD}$$

U navedenom skupu samo su 9 i 36 kvadrati nekog prirodnog broja, a kako je

$$9 = 9 \cdot 1, 36 = 9 \cdot 4 \text{ mora vrijediti } (y - x) \in \{1, 4\}. \quad 1 \text{ BOD}$$

(Do istog zaključka može se doći i na sljedeći način:

Broj 9 je kvadrat prirodnog broja pa i $(y - x)$ mora biti kvadrat nekog prirodnog broja.

Brojevi x i y su znamenke različite od 0, njihova razlika $y - x$ je element skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ pa su jedine mogućnosti $y - x = 1$ ili $y - x = 4$. 2 BODA)

Dalje imamo:

y	9	8	7	6	5	4	3	2	9	8	7	6	5
x	8	7	6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1
$y - x$	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4

Traženi brojevi su : 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 59, 48, 37, 26 i 15. 3 BODA

Prepostavimo da je \overline{xyz} traženi troznamenkasti broj. Od većeg broja ćemo oduzimati manji.

Vrijedi da je $x \neq 0$ (vodeća znamenka) i $z \neq 0$ (prema uvjetu zadatka $z > x$).

Tada je broj zapisan istim znamenkama u obrnutom poretku \overline{zyx} pa je

$$\overline{zyx} - \overline{xyz} = 100z + 10y + x - (100x + 10y + z) = 99z - 99x = 99 \cdot (z - x). \quad 1 \text{ BOD}$$

Prema uvjetu zadatka x i z su znamenke različite od 0 pa je njihova razlika

$$(z - x) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}.$$

$$\text{Dakle, } 99 \cdot (z - x) \in \{0, 99, 198, 297, 396, 495, 597, 693, 792\}. \quad 1 \text{ BOD}$$

Kako niti jedan od elemenata navedenog skupa nije kvadrat nekog prirodnog broja zaključujemo da traženi broj nije troznamenkast. 1 BOD

(Do istog zaključka može se doći i na sljedeći način:

Da bi umnožak $99 \cdot (z - x) = 9 \cdot 11 \cdot (z - x)$ bio kvadrat nekog prirodnog broja $z - x$ mora biti djeljiv s 11, a to je nemoguće jer je $(z - x) < 9$. 2 BODA)

Dakle, uvjet zadatka ispunjava samo trinaest dvoznamenkastih brojeva.

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Najmanje 6 točno napisanih rješenja, bez obrazloženja kako su dobiveni, vrednovati s 1 BODOM, najmanje 9 rješenja s 2 BODA, a svih 13 s 3 BODA.