

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

26. siječnja 2024.

6. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj: $77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4)$.

Prvo rješenje.

$$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4) =$$

$$7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 36) + 9 \cdot 11 \cdot 8 \cdot (77 - 76) = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$7 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9) + 9 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 1 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$88 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 19 - 88 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 18 + 88 \cdot 9 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$88 \cdot (14 \cdot 19 - 14 \cdot 18 + 9) = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$88 \cdot (14 \cdot (19 - 18) + 9) = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$88 \cdot (14 \cdot 1 + 9) =$$

$$88 \cdot 23 = 2024 \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

$$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 6^2) + 99 \cdot 2^3 \cdot (77 - 19 \cdot 4) =$$

$$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 36) + 99 \cdot 8 \cdot (77 - 76) = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$77 \cdot 16 \cdot 19 + 88 \cdot (-7 \cdot 36) + 99 \cdot 8 \cdot 1 =$$

$$23408 - 22176 + 792 = \quad 3 \text{ BODA}$$

$$1232 + 792 = \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2024 \quad 1 \text{ BOD}$$

.....UKUPNO 6 BODOVA

2. U 6. a razredu je 24 učenika. Pola učenika tog razreda svira neki instrument. Također, $\frac{5}{8}$ učenika tog razreda pjeva u zboru. Ako je poznato da više od trećine, a manje od $\frac{5}{12}$ učenika 6. a razreda i svira i pjeva u zboru, koliko učenika tog razreda ne svira niti jedan instrument i ne pjeva u zboru?

Rješenje.

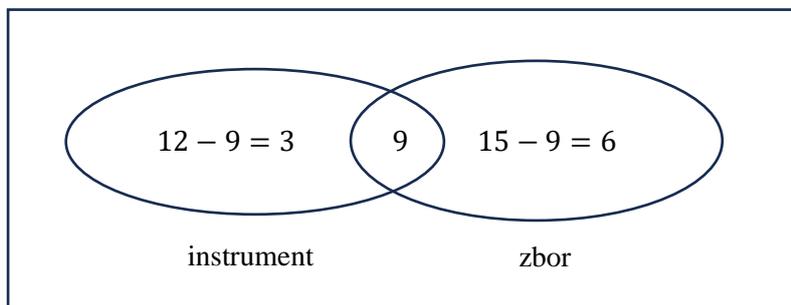
Broj učenika koji svira neki instrument je $24 : 2 = 12$. 1 BOD

U zboru pjeva $\frac{5}{8} \cdot 24 = 15$ učenika. 1 BOD

Budući da je $24 : 3 = 8$, $\frac{5}{12} \cdot 24 = 10$,
 slijedi da 9 učenika i svira i pjeva u zboru.

1 BOD

1 BOD



Broj učenika koji sviraju instrument, pjevaju u zboru ili oboje je

$$(12 - 9) + 9 + (15 - 8) = 18.$$

1 BOD

$24 - 18 = 6$ učenika ne svira instrument i ne pjeva u zboru.

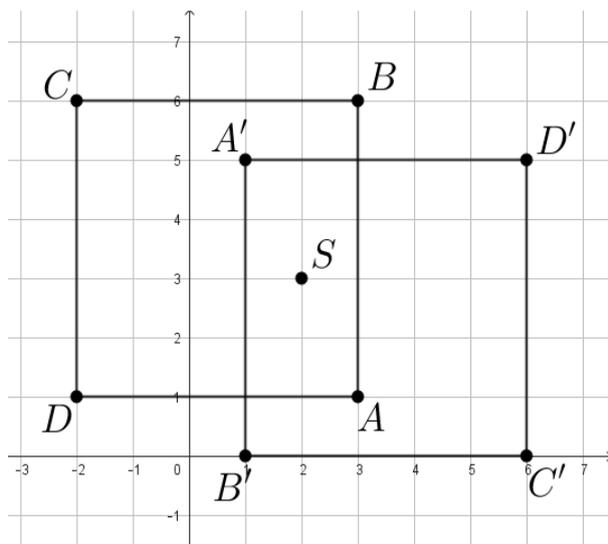
1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: U rješenju nije nužno crtati Vennov dijagram. Točno rješenje koje ima sve potrebne račune i zaključke priznaje se u potpunosti i bez Vennovog dijagrama.

3. U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini zadana je točka $S(2, 3)$ i kvadrat $ABCD$ kojem su poznata tri vrha $A(3, 1)$, $C(-2, 6)$ i $D(-2, 1)$. Kvadrat $A'B'C'D'$ je centralnosimetrična slika kvadrata $ABCD$ s obzirom na točku S . Odredi koordinate točaka B, A', B', C' i D' te površinu lika koji je presjek kvadrata $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Duljina jedinične dužine je 1 cm.

Rješenje.



- Skica

2 BODA

- Točka $B(3, 6)$

1 BOD

- Koordinate točaka $A'(1, 5)$, $B'(1, 0)$, $C'(6, 0)$, $D'(6, 5)$

2 BODA

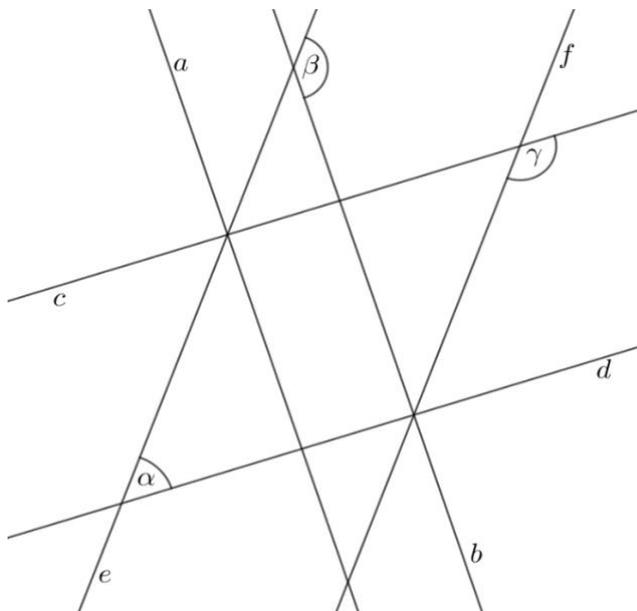
Površina lika u presjeku je

$$P = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}^2.$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

4. Na slici su označeni pravci a, b, c, d, e i f te kutovi α, β i γ . Za pravce na toj slici vrijedi $a \parallel b, c \parallel d, e \parallel f$ i $a \perp d$. Veličina kuta α je $50^\circ 24'$. Odredi veličine kutova β i γ sa slike.



Rješenje.

Kutovi α i γ su kutovi s usporednim kracima ($c \parallel d$ i $e \parallel f$).

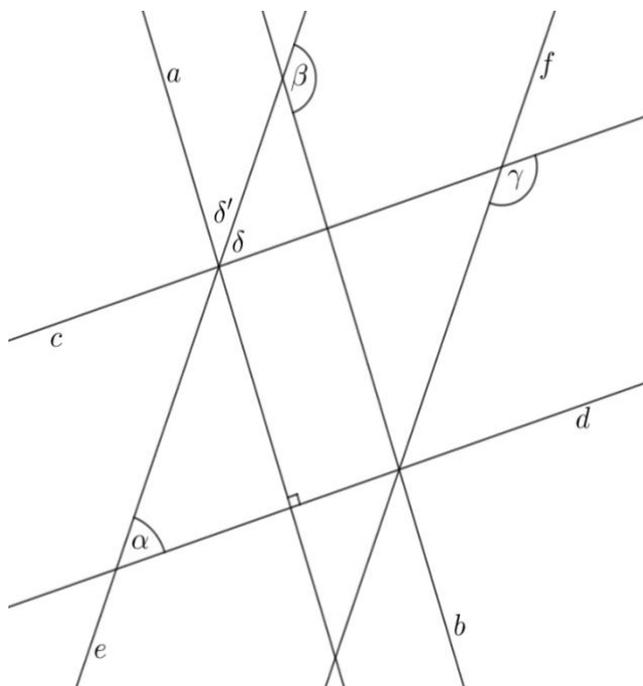
α je šiljasti kut, γ je tupi kut pa su oni suplementarni, odnosno vrijedi $\alpha + \gamma = 180^\circ$.

1 BOD

Iz tog izraza izračunamo $\gamma = 180^\circ - 50^\circ 24' = 179^\circ 60' - 50^\circ 24' = 129^\circ 36'$.

1 BOD

Označimo pomoćne kutove δ i δ' kao na slici.



Kutovi α i δ su šiljasti kutovi uz presječnicu e paralelnih pravaca c i d pa su njihove veličine jednake.

(Može se reći i da su α i δ kutovi s paralelnim kracima $c \parallel d$, e je zajednički krak.)

Dakle, $\delta = \alpha = 50^\circ 24'$ 1 BOD

Iz relacija $a \perp d$ i $d \parallel c$ slijedi $a \perp c$, pa vrijedi $\delta + \delta' = 90^\circ$. 1 BOD

$\delta + \delta' = 90^\circ$ pa je $50^\circ 24' + \delta' = 90^\circ$ iz čega slijedi

$\delta' = 90^\circ - 50^\circ 24' = 89^\circ 60' - 50^\circ 24' = 39^\circ 36'$. 1 BOD

Kutovi δ' i β su šiljasti i tupi kut uz presječnicu e paralelnih pravaca a i b pa su oni suplementarni, odnosno vrijedi $\delta' + \beta = 180^\circ$.

Iz toga slijedi $\beta = 180^\circ - \delta' = 179^\circ 60' - 39^\circ 36' = 140^\circ 24'$. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik riješi zadatak koristeći zbroj veličina kutova u trokutu, takvo rješenje treba vrednovati u skladu s ponuđenom razdiobom bodova.

5. Kamion i autobus istodobno su krenuli jedan drugome u susret s dvaju ulaza na autocestu. Pretpostavimo da kamion cijelo vrijeme vozi istom prosječnom brzinom i prijeđe 27 km za 18 minuta. Pretpostavimo da i autobus cijelo vrijeme vozi svojom istom prosječnom brzinom kojom on prijeđe 864 m za 28.8 sekundi. Ako su se susreli na zajedničkom odmoru nakon 2 sata i 45 minuta takve vožnje, koliko su udaljena njihova dva polazna ulaza na autocestu?

Prvo rješenje.

Jedan sat ima 60 minuta, pa je 2 sata i 45 minuta = $120 + 45 = 165$ minuta.

Kamion prijeđe 27 km za 18 minuta, što znači da prijeđe $27 : 18 = 1.5$ km za 1 minutu. 1 BOD

Za 165 minuta kamion prijeđe $165 \cdot 1.5 = 247.5$ km. 1 BOD

1 km = 1000 m, pa je 864 m = 0.864 km,

1 minuta = 60 sekundi pa je 28.8 sekundi = $28.8 : 60 = 0.48$ minuta. 1 BOD

Autobus prijeđe 0.864 km za 0.48 minuta, što znači da prijeđe $0.864 : 0.48 = 1.8$ km za 1 minutu. 1 BOD

Za 165 minuta autobus prijeđe $165 \cdot 1.8 = 297$ km. 1 BOD

Ukupna udaljenost koju su prešli kamion i autobus, odnosno zbroj tih udaljenosti, jest udaljenost dvaju ulaza na autocestu, $247.5 + 297 = 544.5$ km. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugo rješenje.

Jedan sat im 60 minuta, 45 minuta je $\frac{45}{60} = \frac{3}{4} = 0.75$ sati,

pa je 2 sata i 45 minuta = $2 + 0.75 = 2.75$ sati,

a 18 minuta je $\frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0.3$ sata.

Kamion prijeđe 27 km za 0.3 sata, što znači da prijeđe $27 : 0.3 = 90$ km za 1 sat. 1 BOD

Za 2.75 sati kamion prijeđe $2.75 \cdot 90 = 247.5$ km. 1 BOD

1 km = 1000 m, pa je 864 m = 0.864 km,

1 sat = 3600 sekundi pa je 28.8 sekundi = $28.8 : 3600 = 0.008$ sati. 1 BOD

Autobus prijeđe 0.864 km za 0.008 sati, što znači da prijeđe $0.864 : 0.008 = 108$ km za 1 sat. 1 BOD

Za 2.75 sati autobus prijeđe $2.75 \cdot 108 = 297$ km. 1 BOD

Ukupna udaljenost koju su prešli kamion i autobus, odnosno zbroj tih udaljenosti, jest udaljenost dvaju ulaza na autocestu, $247.5 + 297 = 544.5$ km. 1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Zadatak se može riješiti i pomoću drugih mjernih jedinica koje nisu uobičajene. U tom slučaju točno rješenje treba priznati u potpunosti.

6. Koliko ima brojeva oblika $\overline{2abcd3}$ kojima su sve znamenke međusobno različite, a broj \overline{abcd} je četveroznamenkasti višekratnik broja 5?

Rješenje.

Broj \overline{abcd} je višekratnik broja 5 pa je $d \in \{0,5\}$. 1 BOD

Broj \overline{abcd} je četveroznamenkast broj kojemu su sve znamenke međusobno različite pa ako je

$$d = 0,$$

znamenke a, b, c pripadaju skupu $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 1 BOD

Znamenka a može se odabrati na 7 načina, znamenka b na 6 načina, a znamenka c na 5 načina.

Brojeva oblika $\overline{2abc03}$ ima $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. 3 BODA

Ako je

$$d = 5,$$

znamenke a, b, c pripadaju skupu $\{0, 1, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $a \neq 0$. 1 BOD

Znamenka a može se odabrati na 6 načina, znamenka b na 6 načina, a znamenka c na 5 načina.

Brojeva oblika $\overline{2abc53}$ ima $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$. 3 BODA

Brojeva oblika $\overline{2abcd3}$ kojima su sve znamenke međusobno različite ima

$210 + 180 = 390$. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

7. Pri ulazu u kinodvoranu između 30 posjetitelja je podijeljeno 58 bombona. Svaka djevojčica je dobila šest bombona, svaki dječak četiri bombona, a svaka odrasla osoba po jedan bombon. Koliko je moglo biti djevojčica, koliko dječaka, a koliko odraslih osoba u kinodvorani?

Prvo rješenje.

Nakon što svaki posjetitelj pojede 1 bombon, u dvorani ostane $58 - 30 = 28$ bombona. 1 BOD

Tada odrasle osobe nemaju niti jedan bombon.

Svakom dječaku ostanu 3 bombona pa je broj bombona kod dječaka višekratnik broja 3. 1 BOD
 Svakoj djevojčici ostane 5 bombona pa je broj bombona kod djevojčica višekratnik broja 5. 1 BOD
 Broj bombona kod djevojčica nije veći od 28 pa je mogući broj bombona kod djevojčica 5, 10, 15, 20 i 25. 1 BOD

Tada bi dječacima preostalo redom 23, 18, 13, 8 i 3 bombona, ali su samo 18 i 3 višekratnici broja 3. 2 BODA

Ako je kod dječaka ukupno 18 bombona, onda je kod djevojčica 10 bombona.
 Tada je u dvorani $18 : 3 = 6$ dječaka i $10 : 5 = 2$ djevojčice. 1 BOD
 U dvorani su $30 - (6 + 2) = 22$ odrasle osobe. 1 BOD

Ako su kod dječaka 3 bombona, onda djevojčicama ostaje 25 bombona pa je u dvorani
 $3 : 3 = 1$ dječak i $25 : 5 = 5$ djevojčica. 1 BOD
 U dvorani su $30 - (1 + 5) = 30 - 6 = 24$ odrasle osobe. 1 BOD

U dvorani je mogao biti 1 dječak, 5 djevojčica i 24 odrasle osobe ili 6 dječaka, 2 djevojčice i 22 odrasle osobe.
 UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Neka je a broj djevojčica, b broj dječaka, a c broj odraslih osoba u kino dvorani.
 Vrijedi:
 $a + b + c = 30$
 $6a + 4b + c = 58$ 1 BOD

Ako od druge jednadžbe oduzmemo prvu, dobivamo $5a + 3b = 28$. 2 BODA
 Dobivenu jednadžbu zapišemo na sljedeći način:

$5a - 10 = 18 - 3b$
 $5(a - 2) = 3(6 - b)$ 1 BOD

Iz jednadžbe $5a + 3b = 28$ uvrštavanjem vidimo da a ne može biti niti 0 niti 1.
 Dakle, $a \geq 2$. 1 BOD

Budući da je $a - 2 \geq 0$ slijedi da je $6 - b \geq 0$.
 Također, 5 dijeli $6 - b$ pa je $6 - b = 0$ ili $6 - b = 5$. 1 BOD

Ako je $b = 6$, onda je $a = 2$, $c = 30 - 2 - 6 = 22$. 2 BODA

Ako je $b = 1$, onda je $a = 5$, $c = 30 - 5 - 1 = 24$. 2 BODA

U kinu su bile 2 djevojčice, 6 dječaka i 22 odrasle osobe ili su bile 5 djevojčica, 1 dječak i 24 odrasle osobe.
 UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Jednadžba $5a + 3b = 28$ simbolički izražava isti zaključak za koji se u prvom rješenju dodjeljuje 3 BODA. Nakon toga se može nastaviti na razne načine: promatranjem mogućnosti za $5a$ (kao u prvom rješenju), za b (kao u drugom rješenju), te na slične načine za $3b$ ili za a . Dokaz da postoje samo dvije mogućnosti nosi sljedeća 3 BODA. Zapisivanje svih traženih vrijednosti u svakom od dva slučaja nosi po 2 BODA.